CEVAP ANAHTARI

Ad Soyad : **21.11.2018**
Numara :

MAT 103 LİNEER CEBİR I ARASINAV SORULARI

SORU 1: Bir T iç işlemi için e birim eleman ise e tektir, ispatlayınız.

SORU 2: $\forall x, y \in Z$ için

$$\oplus : Z \times Z \to Z$$
$$(x, y) \to x \oplus y = x + y - xy$$

iç işlemi tanımlansın. $(Z, \oplus)$ bir grup mudur, araştırınız.

SORU 3: Bir $(H, \mathrm{T}, \perp)$ halkasında $x, y \in H$ ve x, y nin (H, T) deki inversleri sırasıyla x', y' ise

$$x \perp y' = x' \perp y = (x \perp y)'$$

dir, ispatlayınız.

SORU 4: IR^3 de $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in IR^3 \mid x_1 < 0\}$ cümlesi bir alt vektör uzayı mıdır, araştırınız.

SORU 5: $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ de

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun:

a) Pozitif tanımlı olduğunu gösteriniz.

b) $x = (2, -3), y = (-1, 4) \in \mathbb{R}^2$ için $\langle x, y \rangle = ?$

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

1- Kabul edelim ki e tek olmasın. Yani, e' de birim elemon olsun.

Bütün x-ler için

$$e T x = x T e = x$$ yazılır. $x = e'$ için de doğrudur. O zamon

$$e T e' = e' T e = e'$$ dur. Aynı sekilde,

Bütün x-ler için

$$e' T x = x T e' = x$$ yazılır $x = e$ için de doğrudur Bu durumda

$$e' T e = e T e' = e$$ olup $e = e'$ bulunur

2- $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$(x,y) \longrightarrow x \oplus y = x + y - xy$ iç islemi için

1- Birlesme özelliği: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ için

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z \text{ midir?}$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y + z - yz) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz)$$

$$\underset{\text{HALKA}}{(\mathbb{Z},+,\cdot)} \quad = x + y + z - yz - xy - xz + xyz \quad \cdots (1)$$

$$(x \oplus y) \oplus z = (x + y - xy) \oplus z = (x + y - xy) + z - (x + y - xy) z$$

$$= x + y + z - xy - xz - yz + xyz \quad \cdots (2)$$

$\Rightarrow$ (1) ve (2) den Birlesme özelliği vardır.

2- Birim eleman: $\forall x \in \mathbb{Z}$ için

$x \oplus e = e \oplus x = x$ olacak şekilde $e \in \mathbb{Z}$ varmıdır?

$$x \oplus e = x + e - xe = x$$

$\Rightarrow e(1-x) = 0$ olup $x = 1$ için sonsuz tane

e elemanı bulunur. Bu ise birim elemanın tek olması gerektiği ile çelişir. Sonuç olarak;

$(\mathbb{Z}, \oplus)$ ikilisi grup değildir.

3-(H, T) abel grubunun birim elemanı θ olmak üzere $y \in H$ için

$y T y' = \theta$ yazılır. Yine $\forall x \in H$ için

$x \perp \theta = \theta \perp x = \theta$ olduğu biliniyor. Buradan,

$$\Rightarrow x \perp (y T y') = \theta$$

$\Rightarrow (x \perp y) T (x \perp y') = \theta$ dur. Bunun anlamı, $(x \perp y')$ elemanı (H, T) abel grubunda $(x \perp y)$ elemanının sağ inversidir. Diğer taraftan, (H, T) bir Abel grup olduğundan $(x \perp y)$ elemanının bu gruptaki inversi tek ve bu invers $(x \perp y')$ dür. O halde

$$(x \perp y)' = x \perp y'.$$

Benzer olarak, $x' \perp y$ elemanının da $x \perp y$ elemanının (H, T) grubunda bir sol invers olduğu gösterilir. ve aynı sebepten

$$(x \perp y)' = x' \perp y.$$

Sonuç olarak, $(x \perp y)' = x' \perp y = x \perp y'$ elde edilir.

4- $W = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < 0 \} \subset \mathbb{R}^3$ cümlesi

1- $\forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in W$ için $x_1 < 0$ ve $y_1 < 0$

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (\underbrace{x_1 + y_1}_{<0}, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in W \text{ dır.}$$

2- $\forall (x_1, x_2, x_3) \in W$ ve $\forall c \in \mathbb{R}$ için $x_1 < 0$

$$c(x_1, x_2, x_3) = (cx_1, cx_2, cx_3) \in W \text{ midir?}$$

Eğer $c = -1$ alınırsa

$cx_1 > 0$ olur ki $c(x_1, x_2, x_3) \notin W$ dur.

Bunun anlamı: W, $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir alt vektör uzayı değildir.

5- a) Pozitif tanımlılık: $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 - x_1 x_2 - x_2 x_1 + 3x_2^2$$
$$= x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + 2x_2^2$$
$$= \underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2x_2^2}_{\geq 0} \geq 0.$$

b) $x = (2, -3)$ ve $y = (-1, 4) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\langle x, y \rangle = \langle (2,-3), (-1,4) \rangle = 2.(-1) - 2(4) - (-1)(-3) + 3(-3)4$$
$$= -49.$$